Lie algebra: the Delaunay similar elements in the produced eccentric anomaly

1980 J. Phys. A: Math. Gen. 13 1145

(http://iopscience.iop.org/0305-4470/13/4/012)

J. Phys. A: Math. Gen. 13 (1980) 1145–1158. Printed in Great Britain

Eine Lie-Algebra, die Delaunay-similar-Elemente in der exzentrischen Anomalie erzeugt

J Baumgarte

Mechanik-Zentrum der Technischen Universität Braunschweig, Postfach 3329, D-3300 Braunschweig, Deutschland

Received 23 July 1979

Zusammenfassung. Über die Konkretisierung eines abstrakten Isomorphismus zwischen zwei Lie-Algebren SO(4, 2) wird die Transformation des Keplerproblems von kartesischen Koordinaten auf Delaunay-similar-Elemente in der exzentrischen Anomalie gewonnen.

Abstract. The concretisation of an abstract isomorphism between two Lie-algebras SO(4, 2) leads to the transformation of the Keplerian problem from cartesian coordinates into Delaunay similar elements in the eccentric anomaly.

1. Einführung

Wir wollen eine Lie-Algebra der Poissonklammern (zur Definition siehe z.B. Goldstein 1974) herleiten. Als Vorlage hierfür dient die bekannte Lie-Algebra SO(3) der Drehimpulskomponenten

$$L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

mit den kartesischen Koordinaten x_i und den konjugierten Impulsen p_i.

Es gelten die Poisson-Klammerrelationen (vergl. Barut 1972):

$$\begin{aligned} &[L_{ij}, L_{ik}] = g_{ii} L_{jk}, \qquad L_{ij} = -L_{ji}, \qquad i, j, k = 1, 2, 3, \\ &g_{ij} = \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Folgender Punkt ist für die Aufstellung unserer Algebra sehr wichtig: Wir sehen, daß die Elemente der Algebra SO(3) (1.1) die Dimension einer Wirkung haben. Diese Dimension müssen überhaupt alle Elemente einer Poisson-Algebra besitzen, wenn die Strukturkonstanten dimensionslos sein sollen. Denn die Bedingung, daß die Poissonklammer aus zwei Funktionen der Impulse und Koordinaten von gleicher Dimension wieder eine Funktion dieser Dimension ergibt, ist nur zu erfüllen, wenn alle drei Funktionen die Dimension einer Wirkung haben.

2. Die SO(1,2) der Kepler-Hamiltonfunktion in der exzentrischen Anomalie

Die klassische Hamiltonfunktion der Keplerbewegung mit der Zeit t als unabhängiger Variablen lautet:

$$H = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 - K^2/r, \qquad \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} = (p_1, p_2, p_3), \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{2.1}$$

(K^2: Gravitationsparameter; reduzierte Masse: $m = 1$). Sie ist aber keine Wirkungsvariable. Nun liefert die Theorie der Transformation auf Wirkungs- und Winkelvariable für die *eigentliche* Wirkungsvariable α der total entarteten Keplerbewegung bekanntlich die Beziehung (vgl. z.B. Goldstein 1974):

$$\alpha - K^2(-2E)^{-1/2} = 0, \tag{2.2}$$

wobei E die Gesamtenergie ist. Diese Relation legt es nahe, den homogenen Formalismus (Stiefel and Scheifele 1971) zu benutzen.

Beim homogenen Formalismus (extended phase space) wird eine neue unabhängige Variable s (fiktive Zeit) eingeführt. Die (physikalische) Zeit wird abhängige (dynamische) Variable $t = x_0$ (Zeitkoordinate), und damit tritt auch der zu ihr konjugierte Impuls p_0 in der verallgemeinerten homogenen Hamiltonfunktion auf. Es ist p_0 die negative Gesamtenergie, wobei jedoch die Anfangsbedingung

$$(H + p_0)|_{s=0} = 0$$

erfüllt sein muß.

In diesen Formalismus ist es zweckmäßig, in der verallgemeinerten homogenen Hamiltonfunktion

$$H_{\mathrm{h}}^* = (H + p_0)\mu, \qquad \mu = \mu(p_i, x_i, p_0, x_0) > 0 \tag{2.3}$$

den Skalierungsfaktor μ so zu wählen, daß der Ausdruck $[-K^2/(2p_0)^{1/2}]$ isoliert auftritt. Dies führt mit

$$\mu = r(2p_0)^{-1/2} \tag{2.4}$$

auf folgende verallgemeinerte homogene Hamiltonfunktion H_{h}^*,

$$H_{\mathrm{h}}^* = [r/(2p_0)^{1/2}][\tfrac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 + p_0] - [K^2/(2p_0)^{1/2}] \tag{2.5}$$

in der—im Gegensatz zu einer anderen Wahl von μ—keine Wurzeln auftreten (Baumgarte 1979b). Durch diese Wahl von μ (2.4) haben wir bekanntlich die exzentrische Anomalie als unabhängige Variable eingeführt. Wir wollen nun in (2.5) den Ausdruck $[-K^2/(2p_0)^{1/2}]$ fortlassen. Dies könnte man mit folgender Begründung tun: Weil in der Hamiltonfunktion (2.5) die Zeitkoordinate x_0 ignorabel ist, kann man in (2.5) p_0 als Konstante ansehen. Läßt man nun den konstanten Ausdruck $[-K^2/(2p_0)^{1/2}]$ fort, dann entfällt natürlich die x_0'-Gleichung (Zeitintegration; $' = \mathrm{d}/\mathrm{d}s$).

Diese Begründung des Fortlassens von $[-K^2/(2p_0)^{1/2}]$ ist wegen des Ansehens von p_0 als Parameter und nicht als Impuls unbefriedigend. Wir wollen daher folgendermaßen argumentieren: Wir sehen in (2.5) den konstanten Parameter $(-K^2)$ als Impuls an und setzen daher

$$(-K^2) = p_4. \tag{2.6}$$

Die zum Impuls p_4 kanonisch konjugierte Koordinate x_4 ist ignorabel.

Das umgekehrte Vorgehen, nämlich den zu einer ignorablen Koordinate konjugierteten Impuls zu einer Konstanten (gegeben durch die Anfangsbedingung) zu machen, ist nichts Neues. Nun führen wir eine kanonische Transformation der Impulse unter sich durch, welche $p_4/(2p_0)^{1/2}$ in $\bar{p}_4$ überführt und alle anderen Impulse, also p_1, p_2, p_3 und p_0 in sich selbst transformiert. Eine derartige kanonische Transformation besteht, wie man sich leicht überzeugt, nur aus den Transformationsgleichungen

$$p_4/(2p_0)^{1/2}=\bar{p}_4, \qquad p_0=\bar{p}_0, \tag{2.7a}$$

$$x_0=\bar{x}_0-(\bar{p}_4/2\bar{p}_0)\bar{x}_4, \qquad x_4=\bar{x}_4/\sqrt{2\bar{p}_0}, \tag{2.7b}$$

wobei für $\bar{x}_4$ gilt:

$$\bar{x}_4=s=u+\text{const.} \tag{2.7c}$$

Setzen wir nun (2.6) und (2.7a) in (2.5) ein, dann bekommen wir, wenn wir für $\bar{r}$, $\bar{\boldsymbol{p}}^2$, $\bar{p}_0$ wieder r, $\boldsymbol{p}^2$, p_0 schreiben:

$$H_{\text{h}}^{*}=[r/(2p_0)^{1/2}][\tfrac{1}{2}\boldsymbol{p}^2+p_0]+\bar{p}_4. \tag{2.8}$$

Wir können nun (2.8) als neue homogene Hamiltonfunktion auffassen. Lassen wir jetzt den isolierten Impuls $\bar{p}_4$ fort, dann sind wir gewissermaßen zur inhomogenen Hamiltonfunktion zurückgegangen.

Diese Hamiltonfunktion, die wir H^* nennen wollen, ist natürlich die eigentliche Wirkungsvariable α (2.2)

$$\alpha=H^*=[r/(2p_0)^{1/2}][\tfrac{1}{2}\boldsymbol{p}^2+p_0]. \tag{2.9}$$

Die neue unabhängige Variable, welche die durch (2.9) beschriebene Bewegung wiedergibt, ist—als Konjugierte zu $\bar{p}_4$—, wie bereits erwähnt, bis auf eine Konstante die *exzentrische Anomalie*, also $s=u+\text{const.}$

Neben der Wirkungsvariablen H^*, die wir in unserer Poisson-Algebra aus später ersichtlichen Gründen L_{56} nennen, nehmen wir noch das Element L_{46}

$$L_{46}=r(2p_0)^{-1/2}[\tfrac{1}{2}\boldsymbol{p}^2-p_0], \tag{2.10}$$

welches gleichfalls die Dimension einer Wirkung hat, zur konstruierenden Lie-Algebra mit hinzu. Durch Poisson Klammerbildung

$$[L_{46},L_{56}]=-L_{45}=-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}=-(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3) \tag{2.11}$$

wird eine abgeschlossene Algebra SO(1,2), bestehend aus den Elementen L_{45}, L_{46}, L_{56} gewonnen. Man überzeugt sich davon, daß folgende Strukturrelationen gelten (vergl. Barut 1972):

$$\begin{aligned}&[L_{ij},L_{ik}]=g_{ii}L_{jk}; \qquad L_{ij}=-L_{ji}; \qquad i,j,k=4,5,6,\\ &g_{44}=1, \qquad g_{55}=g_{66}=-1; \qquad g_{ij}=0, \qquad i\neq j.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Die Bezeichnung SO(1,2) sagt aus, daß unter den drei Größen g_{ii} eine positiv und zwei negativ sind.

3. Die Lie-Algebren SO(4,2) und SO(3,2)

Wir wollen nun die Algebra SO(1,2), festgelegt durch die Gleichungen (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) in eine höhere Algebra einbetten. Das Vorkommen des 'Dilatators' (diese Bezeichnung stammt von Stickforth 1977) $L_{45}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}$ legt es nahe, dies Ziel über die bekannte Beziehung

$$r^2\boldsymbol{p}^2=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p})^2-(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})^2 \tag{3.1}$$

zu suchen. Es sind nun rp_1, rp_2, rp_3 proportional zu den Komponenten des Vektors

$x' = dx/ds$ ($s = u + \text{const}$). Wegen der in der Himmelsmechanik bekannten Oszillator-Gleichung (für das ungestörte Kepler-Problem)

$$(x')'' + x' = 0, \tag{3.2}$$

der die Poisson-Klammerrelation

$$[[rp_j, H^*], H^*] + rp_j = 0, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{3.3}$$

entspricht, wobei H^* durch (2.9) gegeben ist, bilden

$$rp_j, \qquad H^* = r(2p_0)^{-1/2}[\tfrac{1}{2}p^2 + p_0], \qquad [rp_j, H^*], \qquad j = 1, 2, 3$$

für jedes j eine abgeschlossene Poisson-Algebra SO(1,2). Man stellt nun fest (vgl. Baumgarte 1978), daß die fünf Elemente

$$rp_1,\ rp_2,\ rp_3,\ r(2p_0)^{-1/2}[\tfrac{1}{2}p^2 - p_0],\ r(2p_0)^{-1/2}[\tfrac{1}{2}p^2 + p_0] = H^*, \tag{3.4}$$

die wir jetzt mit $L_{16}, L_{26}, L_{36}, L_{46}, L_{56}$ bezeichnen wollen, durch fortgesetzte Poisson-Klammerbildung eine abgeschlossene Lie-Algebra SO(4,2) erzeugen. Sie erhält 15 Elemente. Darunter sind neben den Drehimpulskomponenten (1.1) die drei Komponenten des (2) Laplace-Vektors (Barut 1972, Baumgarte 1978, 1979a)

$$L_{i4} = (2p_0)^{-1/2}\{[\tfrac{1}{2}p^2 - p_0]x_i - (x \cdot p)p_i\}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3.5a}$$

ferner die Elemente

$$L_{i5} = (2p_0)^{-1/2}\{[\tfrac{1}{2}p^2 + p_0]x_i - (x \cdot p)p_i\}, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.5b}$$

sowie der 'Dilatator' $L_{45} = x \cdot p$ aus (2.11) und natürlich die in (3.4) angegebenen Elemente L_{k6}, $k = 1, 2, \ldots, 5$. Durch explizite Rechnung bestätigt man, daß die Poisson-Klammer-Relationen lauten:

$$\begin{gathered} [L_{ij}, L_{ik}] = g_{ii}L_{jk}, \qquad L_{ij} = -L_{ji}, \qquad i, j, k = 1, \ldots, 6, \\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1, \qquad g_{55} = g_{66} = -1, \qquad g_{ij} = 0, \quad i \neq j. \end{gathered} \tag{3.6}$$

In Baumgarte (1978) wurde ausführlich gezeigt, wie diese Lie-Algebra SO(4,2) die Dynamik der räumlichen Keplerbewegung beschreibt†. Dort wurde auch die für die ebene Keplerbewegung charakteristische Poisson-Algebra SO(3,2) abgeleitet. Sie besteht aus folgenden 10 Elementen:

$$\begin{aligned} &M_{12} = x_1p_2 - x_2p_1 \\ &M_{i3} = (2p_0)^{-1/2}\{[\tfrac{1}{2}p^2 - p_0]x_i - (x \cdot p)p_i\}, \qquad i = 1, 2 \\ &M_{i4} = (2p_0)^{-1/2}\{[\tfrac{1}{2}p^2 + p_0]x_i - (x \cdot p)p_i\}, \qquad i = 1, 2 \\ &M_{34} = x \cdot p \\ &M_{i5} = rp_i, \qquad i = 1, 2 \\ &M_{35} = r(2p_0)^{-1/2}[\tfrac{1}{2}p^2 - p_0] \\ &M_{45} = r(2p_0)^{-1/2}[\tfrac{1}{2}p^2 + p_0]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Es treten hier folgende Abkürzungen auf

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2, \qquad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \qquad x \cdot p = x_1p_1 + x_2p_2, \tag{3.8}$$

† Das 'Aufdecken' und 'Verbergen' von Symmetrien wurde in Baumgarte (1979a) behandelt.

und es gelten die Poissonklammer-Relationen:

$$\begin{aligned}
&[M_{ij}, M_{ik}] = g_{ii}M_{jk}, \qquad M_{ij} = -M_{ji}, \qquad i, j, k = 1, \ldots . 5,\\
&g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \qquad g_{44} = g_{55} = -1, \qquad g_{ij} = 0,\ i \neq j.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

4. Die Algebra SO(3,2) der Wirkungs- und Winkelvariablen

Wir wollen jetzt eine Lie-Algebra SO(3,2) konstruieren, deren Elemente aus Wirkungsvariablen α_1, α_2 und Winkelvariablen β_1, β_2 aufgebaut sind. Es gilt natürlich

$$[\alpha_1, \alpha_2] = [\beta_1, \beta_2] = 0, \qquad [\beta_1, \alpha_1] = [\beta_2, \alpha_2] = 1. \tag{4.1}$$

Zur Konstruktion dieser Algebra betrachten wir zunächst die Unteralgebra SO(3) der höheren Algebra SO(3,2) angegeben in (3.7), (3.8), (3.9), welche aus den Elementen M_{12}, M_{13}, M_{23} besteht. Aus den Strukturrelationen (3.9) folgt:

$$[M_{13}, M_{12}] = -M_{23}, \qquad [M_{23}, M_{12}] = M_{13} \tag{4.2a}$$

oder

$$[[M_{13}, M_{12}], M_{12}] = -M_{13}. \tag{4.2b}$$

Setzt man $M_{12} = \alpha_1$, dann gilt mit der zu der Wirkungsvariablen α_1 kanonisch konjugierten Winkelvariablen β_1 die Oszillator-Differentialgleichung

$$\mathrm{d}M_{13}/\mathrm{d}\beta_1 = -M_{23}; \qquad \mathrm{d}M_{23}/\mathrm{d}\beta_1 = M_{13} \tag{4.3a}$$

oder

$$\mathrm{d}^2 M_{13}/\mathrm{d}\beta_1^2 = -M_{13}. \tag{4.3b}$$

Die Lösung von (4.3*a*) bzw. (4.3*b*) lautet:

$$M_{13} = a(\alpha_1, \alpha_2) \cos \beta_1, \qquad M_{23} = a(\alpha_1, \alpha_2) \sin \beta_1 \tag{4.4}$$

(Eigentlich müßte als Argument der trigonometrischen Funktionen $(\beta_1 + c)$ auftreten, $c = c(\alpha_1, \alpha_2)$. Dies c ist jedoch unwesentlich und kann Null gesetzt werden.)

Für die Wirkungsvariable α_2 verlangen wir natürlich

$$\alpha_2 = M_{45}, \tag{4.5}$$

wodurch die Hamiltonfunktion M_{45} der ebenen Keplerbewegung—beschrieben in der exzentrischen Anomalie—auf die eigentliche Wirkungsvariable transformiert wird. Aus (3.9) verifizieren wir die Casimir-Invarianten-Beziehung

$$M_{12}^2 + M_{13}^2 + M_{23}^2 = M_{45}^2, \tag{4.6}$$

und erhalten hieraus die Amplitude $a(\alpha_1, \alpha_2)$:

$$a(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^{1/2} \tag{4.7}$$

(Wir entscheiden uns für das positive Vorzeichen der Wurzel.) Damit erhalten wir—wenn wir die Elemente der neuen Algebra mit $\tilde{M}$ bezeichnen—

$$\begin{aligned}
&\tilde{M}_{12} = \alpha_1, \qquad \tilde{M}_{13} = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^{1/2} \cos \beta_1,\\
&\tilde{M}_{23} = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^{1/2} \sin \beta_1,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

und können uns davon überzeugen, daß die Poisson-Klammerrelationen (3.9) (für die $\tilde{M}$) gelten. (Es bedeuten $\tilde{M}_{13}$, $\tilde{M}_{23}$ die Komponenten des Laplace-Vektors.)

Aus analogen Überlegungen kann man die Unteralgebra SO(1,2) bestehend aus den Elementen $\tilde{M}_{34}$, $\tilde{M}_{35}$, $\tilde{M}_{45}=\alpha_2$ konstruieren. Man verifiziert in (3.9), daß die Casimir-Invarianten-Beziehung

$$M_{45}^2-(M_{34}^2+M_{35}^2)=M_{12}^2 \tag{4.9}$$

gilt. Aus (4.9) folgt mit den Poissonklammer-Relationen

$$\begin{aligned} &[M_{34}, M_{35}]=M_{45}, \qquad [M_{35}, M_{45}]=-M_{34}, \\ &[M_{34}, M_{45}]=M_{35} \end{aligned} \tag{4.10}$$

für die entsprechenden $\tilde{M}$ Elemente:

$$\begin{aligned} &\tilde{M}_{34}=(\alpha_2^2-\alpha_1^2)^{1/2}\sin\beta_2; \qquad \tilde{M}_{35}=(\alpha_2^2-\alpha_1^2)^{1/2}\cos\beta_2; \\ &\tilde{M}_{45}=\alpha_2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Jetzt sind wir in der Lage, durch fortgesetzte Poissonklammer-Bildung die vollständige Lie-Algebra SO(3,2) der $\tilde{M}$-Elemente zu erzeugen. Wir möchten dabei noch erwähnen, daß nur vier Elemente, die alle Indizes von 1 bis 5 enthalten, ausreichen, um die vollständige Poisson-Algebra SO(3,2) zu erzeugen. Es genügen z.B. $\tilde{M}_{12}$, $\tilde{M}_{23}$, $\tilde{M}_{34}$, $\tilde{M}_{45}$.

Wir geben nun die 10 Elemente unserer neuen Algebra SO(3,2) an, für welche (mit $\tilde{M}$) die Strukturrelationen (3.9) gelten. Neben $\tilde{M}_{12}$, $\tilde{M}_{13}$, $\tilde{M}_{23}$ (4.8) und $\tilde{M}_{34}$, $\tilde{M}_{35}$, $\tilde{M}_{45}$ (4.11) bekommt man noch

$$\begin{aligned} &\tilde{M}_{14}=\alpha_2\cos\beta_1\cos\beta_2-\alpha_1\sin\beta_1\sin\beta_2 \\ &\tilde{M}_{24}=\alpha_2\sin\beta_1\cos\beta_2+\alpha_1\cos\beta_1\sin\beta_2 \\ &\tilde{M}_{15}=-\alpha_2\cos\beta_1\sin\beta_2-\alpha_1\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ &\tilde{M}_{25}=-\alpha_2\sin\beta_1\sin\beta_2+\alpha_1\cos\beta_1\cos\beta_2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Wenn wir nun den abstrakten Isomorphismus zwischen der Kepler-Algebra SO(3,2) (3.7) und der Algebra SO(3.2) in Wirkungs- und Winkelvariablen $\tilde{M}_{ij}$, $i, j=1, \ldots, 5$ konkretisieren, dann haben wir für das ebene Oszillator-Kepler-Problem die Transformation von kartesichen Koordinaten auf Wirkungs- und Winkelvariable gewonnen. Wir finden (vgl. auch Baumgarte 1978):

$$x_i=(2p_0)^{-1/2}(\tilde{M}_{i4}-\tilde{M}_{i3}), \qquad i=1,2 \tag{4.13a}$$

$$r=(2p_0)^{-1/2}(\tilde{M}_{45}-\tilde{M}_{35}) \tag{4.13b}$$

$$p_i=\tilde{M}_{i5}/r, \qquad i=1,2. \tag{4.13c}$$

Darauf wollen wir aber erst im wichtigeren dreidimensionalen Fall genauer eingehen.

5. Physikalische Konsequenzen aus der Algebra SO(3,2) der $\tilde{L}$-Elemente und geometrischen Betrachtungen

Es ist nun ein ganz wichtiger Punkt, daß die Wirkungs- und Winkelvariablen α_1, α_2, β_1, β_2 nicht notwendigerweise zu einem zweidimensionalen Problem zu gehören brauchen.

Vielmehr bilden alle Funktionen

$$\alpha_1 = \alpha_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n), \qquad \text{usw.} \tag{5.1}$$

des $2n$-dimensionalen Phasenraumes, welche die Beziehungen

$$[\alpha_1, \alpha_2] = [\beta_1, \beta_2] = 0, \qquad [\beta_1, \alpha_1] = [\beta_2, \alpha_2] = 1 \tag{5.2}$$

erfüllen, auch eine Poisson-Algebra SO(3,2), gegeben durch (4.8), (4.11), (4.12). Da nun β_1 und β_2 nur in trigonometrischen Funktionen auftreten und unsere Überlegungen an mechanische Probleme geknüpft sein sollen, wollen wir α_1, β_1 und α_2, β_2 als zwei konjugierte Paare von Wirkungs- und Winkelvariablen auffassen. Sie gehören zu einem n-dimensionalen mechanischen Problem, das durch die Hamiltonfunktion

$$H = H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) \tag{5.3}$$

beschrieben wird. Dabei sind im allgemeinen Fall die Winkelvariablen β_1, β_2 mehrdeutig. Liegt jedoch bei unserem Problem zweifache Entartung vor, und gehören $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ zu dieser zweifachen Entartung, dann sind neben α_1 und α_2 auch die trigonometrischen Funktionen von β_1 und β_2 (β_1, β_2 sind dann uneigentliche Winkelvariable) eindeutige Bewegungsintegrale der durch H (5.3) beschriebenen Bewegung. In diesem Fall sind also *alle* 10 Elemente $\tilde{M}_{ik}$ unserer Algebra SO(3,2) in (4.8), (4.11), (4.12) *eindeutige* Integrale der durch H (5.3) beschriebenen mechanischen Bewegung.

Die Vergrößerung der Anzahl der eindeutigen Bewegungsintegrale (im Vergleich zum allgemeinen Fall eines nicht entarteten Systems mit derselben Anzahl von Freiheitsgraden) ist eine sehr wesentliche Besonderheit der entarteten Systeme.

Natürlich ist der Fall, daß die Elemente $\tilde{M}_{ij}$, $ij = 1, \ldots, 5$, eindeutige Funktionen sind, besonders interessant. Mit einem darartigen Fall haben wir es immer zu tun, wenn bei einem mechanischen Problem zweifache Entartung vorliegt. Der wichtigste Fall einer zweifachen Entartung bildet die dreidimensionale Keplerbewegung, beschrieben durch die Hamiltonfunktion

$$H = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 - K^2/r, \tag{5.4}$$

wobei die Zeit t unabhängige Variable ist.

Bei jedem zweifach entarteten dreidimensionalen Problem können wir aus der Algebra SO(3,2) der $\tilde{M}_{ij}$ folgende Beziehungen verifizieren:
Die Vektoren

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} = (\tilde{M}_{23}, -\tilde{M}_{13}, \tilde{M}_{12}) \tag{5.5}$$

und

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_4 = \tilde{M}_{i4}, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{5.6}$$

sind orthogonal, woraus die weitere Casimir-Invariante

$$\boldsymbol{l} \cdot \tilde{\boldsymbol{M}}_4 = 0 \tag{5.7}$$

folgt. Außerdem überzeugt man sich, daß weiterhin gilt:

$$(1/\alpha_2)\boldsymbol{l} \times \tilde{\boldsymbol{M}}_4 = \tilde{\boldsymbol{M}}_5, \qquad \tilde{\boldsymbol{M}}_5 = \tilde{M}_{i5}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{5.8}$$

Für ein zweifach entartetes dreidimensionales mechanisches Problem stehen also die drei Einheitsvektoren

$$(1/\alpha_2)\boldsymbol{l}, \qquad (1/\alpha_2)\tilde{\boldsymbol{M}}_4, \qquad (1/\alpha_2)\tilde{\boldsymbol{M}}_5$$

jeweils senkrecht aufeinander. (Für die Beträge von

$$\boldsymbol{l}, \tilde{\boldsymbol{M}}_4, \tilde{\boldsymbol{M}}_5 \text{ gilt: } |\boldsymbol{l}| = |\tilde{\boldsymbol{M}}_4| = |\tilde{\boldsymbol{M}}_5| = \alpha_2.)$$

Nun wissen wir, daß bei der Keplerbewegung, beschrieben durch die Hamiltonfunktion H (5.4), die drei Komponenten des Drehimpulsvektors Bewegungsintegrale sind. Wenn wir nun den Vektor $\boldsymbol{l}$ als Drehimpulsvektor auffassen (dies können wir wegen $[\boldsymbol{l}, H] = 0$ tun), dann steht bekanntlich $(1/\alpha_2)\boldsymbol{l}$ senkrecht auf der Bahnebene und die beiden Einheitsvektoren $(1/\alpha_2)\tilde{\boldsymbol{M}}_4$ und $(1/\alpha_2)\tilde{\boldsymbol{M}}_5$ müssen in der Bahnebene (Zentralkraftproblem = ebenes Problem) liegen. Sie müssen daher die beiden Laplace-Einheitsvektoren sein.
Setzt man

$$\cos I = \alpha_1/\alpha_2, \qquad \sin I = [1 - (\alpha_1^2/\alpha_2^2)]^{1/2} \tag{5.9}$$

wobei die geometrische Bedeutung von I bekanntlich die Inklination ist, und faßt β_1 als Länge des aufsteigenden Knotens und β_2 als Winkelabstand vom Knoten zum Perizentrum auf, so gelten folgende geometrische Beziehungen.

Das Vektorprodukt des Einheitsvektors in Richtung der Knotenlinie $\boldsymbol{e}_K$

$$\boldsymbol{e}_K = \begin{pmatrix} \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

mit dem Normaleneinheitsvektor der Bahnebene $\boldsymbol{e}_N$

$$\boldsymbol{e}_N = (1/\alpha_2)\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} \sin\beta_1 \sin I \\ -\cos\beta_1 \sin I \\ \cos I \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

also

$$\boldsymbol{e}_N \times \boldsymbol{e}_K = \begin{pmatrix} -\sin\beta_1 \cos I \\ \cos\beta_1 \cos I \\ \sin I \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_s, \tag{5.12}$$

liefert den Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_s$ senkrecht zur Knotenlinie. Damit erhält man für den Einheitsvektor in Richtung des Perizentrums (den einen Laplace-Einheitsvektor)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_K \cos\beta_2 + \boldsymbol{e}_s \sin\beta_2 = \begin{pmatrix} \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos I \\ \sin\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\beta_1 \sin\beta_2 \cos I \\ \sin\beta_2 \sin I \end{pmatrix} \tag{5.13a}$$

also

$$\boldsymbol{A} = (1/\alpha_2)\tilde{\boldsymbol{M}}_4, \tag{5.13b}$$

sowie (den anderen Laplace-Einheitsvektor)

$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{e}_K \sin\beta_2 + \boldsymbol{e}_s \cos\beta_2 = \begin{pmatrix} -\cos\beta_1 \sin\beta_2 - \sin\beta_1 \cos\beta_2 \cos I \\ -\sin\beta_1 \sin\beta_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos I \\ \cos\beta_2 \sin I \end{pmatrix} \tag{5.14a}$$

also

$$\boldsymbol{B} = (1/\alpha_2)\tilde{\boldsymbol{M}}_5. \text{ (Vgl. Stiefel and Scheifele 1971, Seite 69).} \tag{5.14b}$$

In seiner Arbeit hat Stickforth (1977) die Lie-Algebra SO(3,2) aus anderen Überlegungen—jedoch in kartesischen Koordinaten und Impulsen und *nicht* in Wirkungs- und Winkelvariablen—aufgestellt. Aus der Unteralgebra SO(3,1) bestehend aus den Elementen $\tilde{M}_{12}$, $\tilde{M}_{13}$, $\tilde{M}_{23}$, $\tilde{M}_{14}$, $\tilde{M}_{24}$, $\tilde{M}_{34}$ (beschrieben in kartesischen Koordinaten und Impulsen), also dem Drehimpulsvektor $\boldsymbol{l}$ und dem Laplace-Vektor $\alpha_2\boldsymbol{A}$, welche eine Lorentz-Algebra ist, folgert Stickforth, daß bereits für das nichtrelativistische Keplerproblem eine Lorentz-Algebra SO(3,1) und darüberhinaus auch eine Anti de Sitter-Algebra SO(3.2) (nämlich unsere SO(3.2), aber beschrieben in kartesischen Koordinaten mit Impulsen) charakteristisch ist. Wir müssen jedoch feststellen, daß unsere SO(3.2) (beschrieben in kartesischen Koordinaten und Impulsen) nicht nur die Hamiltonfunktion H (5.4) allein auszeichnet. Vielmehr kommutieren alle 10 Elemente der SO(3,2) (in Koordinaten und Impulsen) nicht nur mit H (5.4), bzw. mit einer beliebigen Funktion $f(H)$, sondern darüberhinaus mit jeder beliebigen Funktion $g(H, \cos M)$, wobei M die mittlere Anomalie ist Stiefel and Scheifele (1971), und $\cos M$ eine eindeutige Funktion der kartesischen Koordinaten und Impulse ist.

6. Die Lie-Algebra SO(4,2) der Wirkungs- und Winkelvariablen

Wir suchen jetzt eine Realisation der Algebra SO(4,2) durch Wirkungs- und Winkelvariable α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3. In Analogie zu unseren bisherigen Überlegungen ist diese Realisation leicht zu konstruieren. Zuerst setzen wir

$$\tilde{L}_{12} = \alpha_1, \qquad \tilde{L}_{56} = \alpha_3, \tag{6.1}$$

womit die x_3-Komponente des Drehimpulses und die Hamiltonfunktion H^* (2.9) Wirkungsvariable werden.

Identifizieren wir den Betrag des Drehimpulses mit der Wirkungsvariablen α_2 (vgl. die Separation in Kugelkoordinaten), dann gilt wieder

$$\begin{aligned} &\tilde{L}_{12} = \alpha_1, \qquad \tilde{L}_{13} = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^{1/2} \cos \beta_1, \\ &\tilde{L}_{23} = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^{1/2} \sin \beta_1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Jetzt überzeugt man sich in der SO(4,2) der L_{ij}, i, $j = 1, \ldots, 6$, daß die Casimir-Invariante der Unteralgebra SO(3), bestehend aus den Elementen L_{12}, L_{13}, L_{23}, gleich der Casimir-Invarianten der Unteralgebra SO(1,2), bestehend aus den Elementen L_{45}, L_{46}, L_{56} ist. Also gilt:

$$L_{12}^2 + L_{13}^2 + L_{23}^3 = L_{56}^2 - (L_{45}^2 + L_{46}^2). \tag{6.3}$$

Für unsere neue Algebra SO(4,2) muß daher gleichfalls

$$\tilde{L}_{12}^2 + \tilde{L}_{13}^2 + \tilde{L}_{23}^2 = \alpha_2^2 = \tilde{L}_{56}^2 - (\tilde{L}_{45}^2 + \tilde{L}_{46}^2) \tag{6.4}$$

erfüllt sein. Dies liefert analog wie früher (vgl. (4.9), (4.10), (4.11)):

$$\begin{aligned} &\tilde{L}_{45} = (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)^{1/2} \sin \beta_3, \qquad \tilde{L}_{46} = (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)^{1/2} \cos \beta_2, \\ &\tilde{L}_{56} = \alpha_3. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Hierbei ist β_3 als kanonische Konjugierte zu α_3 (bis auf eine additive Konstante) die exzentrische Anomalie u. Zur Erzeugung der vollständigen Algebra SO(4,2) benötigt man jetzt nur noch ein weiteres Element, z.B. $\tilde{L}_{34}$. Es reichen fünf Elemente, z.B. $\tilde{L}_{12}$,

$\tilde{L}_{23}$, $\tilde{L}_{34}$, $\tilde{L}_{46}$, $\tilde{L}_{56}$ oder auch $\tilde{L}_{14}$, $\tilde{L}_{24}$, $\tilde{L}_{34}$, $\tilde{L}_{46}$, $\tilde{L}_{56}$ aus, um durch fortgesetzte Poissonklammer-Bildung die gesamte Lie-Algebra SO(4,2) zu erzeugen.

Um das Element $\tilde{L}_{34}$, bzw. die Elemente $\tilde{L}_{14}$, $\tilde{L}_{24}$, $\tilde{L}_{34}$, zu bestimmen, benutzen wir:

1) die leicht zu verifizierende Beziehung, daß die sechs Elemente L_{12}, L_{13}, L_{23}, L_{14}, L_{24}, L_{34} der Algebra SO(4,2) in Kap.3 eine Unteralgebra SO(4) bilden (Barut 1972, Baumgarte 1978), deren Casimir-Invariante $L_{56}^2=(H^*)^2$ ist. Damit gilt

$$L_{14}^2+L_{24}^2+L_{34}^2=L_{56}^2-(L_{12}^2+L_{13}^2+L_{23}^2). \tag{6.6}$$

Übernehmen wir die Aussage von (6.6) für die $\tilde{L}$-Elemente, so muß gelten

$$\tilde{L}_{14}^2+\tilde{L}_{24}^2+\tilde{L}_{34}^2=\alpha_3^2-\alpha_2^2. \tag{6.7}$$

2) Wir benutzen außerdem die Beziehung, daß die sechs Elemente $\tilde{M}_{12}$, $\tilde{M}_{13}$, $\tilde{M}_{23}$, $\tilde{M}_{14}$, $\tilde{M}_{24}$, $\tilde{M}_{34}$ der Algebra SO(3,2) in Kap. 4 eine Unteralgebra SO(3,1) bilden, deren Casimir-Invariante verschwindet. (Entsprechendes gilt natürlich auf für die Elemente M_{ij}, $i, j=1,\ldots,5$, der Algebra SO(3,2).

Verlangen wir jetzt noch, daß für unsere zu konstruierende Algebra SO(4,2) die Elemente $\tilde{L}_{14}$, $\tilde{L}_{24}$, $\tilde{L}_{34}$ die Komponenten des geeignet normierten (2.) Laplace-Vektors sein sollen, dann können wir über den Einheitsvektor $\boldsymbol{A}$ (5.13a, b) ansetzen

$$\begin{pmatrix}\tilde{L}_{14}\\ \tilde{L}_{24}\\ \tilde{L}_{34}\end{pmatrix}=(\alpha_3^2-\alpha_2^2)^{1/2}\mathbf{A}. \tag{6.8}$$

Wir können uns jetzt davon überzeugen, daß die sechs Elemente $\tilde{L}_{12}$, $\tilde{L}_{13}$, $\tilde{L}_{23}$ (6.2) und $\tilde{L}_{14}$, $\tilde{L}_{24}$, $\tilde{L}_{34}$ (6.8) mit (5.13a, b) und (5.9) eine Lie-Algebra SO(4) bilden, deren Casimir-Invariante α_3^2 ist, wie es sein soll.

Wie bereits gesagt, hätte man nur

$$\tilde{L}_{34}=(\alpha_3^2-\alpha_2^2)^{1/2}(1-(\alpha_1/\alpha_2)^2)^{1/2}\sin\beta_2$$

neben den Elementen $\tilde{L}_{13}$, $\tilde{L}_{23}$, $\tilde{L}_{46}$, $\tilde{L}_{56}$ benötigt. Durch fortgesetzte Poisson-Klammerbildung aus $\tilde{L}_{13}$, $\tilde{L}_{23}$, $\tilde{L}_{34}$, $\tilde{L}_{46}$, $\tilde{L}_{56}$ bzw. aus $\tilde{L}_{14}$, $\tilde{L}_{24}$, $\tilde{L}_{34}$, $\tilde{L}_{46}$, $\tilde{L}_{56}$ erhält man jetzt die 15 Elemente der gesuchten Lie-Algebra SO(4,2).

Für diese Algebra bekommt man, neben $\tilde{L}_{12}$, $\tilde{L}_{56}$ (6.1), $\tilde{L}_{13}$, $\tilde{L}_{23}$ (6.2), $\tilde{L}_{45}$, $\tilde{L}_{46}$ (6.5), $\tilde{L}_{i4}$, $i=1, 2, 3$, (6.8) noch die Elemente

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{15}&=-\alpha_2\sin\beta_3\,[\cos\beta_1\sin\beta_2+\sin\beta_1\cos\beta_2(\alpha_1/\alpha_2)]\\
&\qquad+\alpha_3\cos\beta_3\,[\cos\beta_1\cos\beta_2-\sin\beta_1\sin\beta_2(\alpha_1/\alpha_2)]\\
\tilde{L}_{25}&=-\alpha_2\sin\beta_3\,[\sin\beta_1\sin\beta_2-\cos\beta_1\cos\beta_2(\alpha_1/\alpha_2)]\\
&\qquad+\alpha_3\cos\beta_3\,[\sin\beta_1\cos\beta_2+\cos\beta_1\sin\beta_2(\alpha_1/\alpha_2)]\\
\tilde{L}_{35}&=(\alpha_2^2-\alpha_1^2)^{1/2}\sin\beta_3\cos\beta_2+\alpha_3[1-(\alpha_1/\alpha_2)^2]^{1/2}\cos\beta_3\sin\beta_2\\
\tilde{L}_{16}&=-\alpha_2\cos\beta_3\,[\cos\beta_1\sin\beta_2+\sin\beta_1\cos\beta_2(\alpha_1/\alpha_2)]\\
&\qquad-\alpha_3\sin\beta_3\,[\cos\beta_1\cos\beta_2-\sin\beta_1\sin\beta_2(\alpha_1/\alpha_2)]\\
\tilde{L}_{26}&=-\alpha_2\cos\beta_3\,[\sin\beta_1\sin\beta_2-\cos\beta_1\cos\beta_2(\alpha_1/\alpha_2)]\\
&\qquad-\alpha_3\sin\beta_3\,[\sin\beta_1\cos\beta_2+\cos\beta_1\sin\beta_2(\alpha_1/\alpha_2)]\\
\tilde{L}_{36}&=(\alpha_2^2-\alpha_1^2)^{1/2}\cos\beta_3\cos\beta_2-\alpha_3[1-(\alpha_1/\alpha_2)^2]^{1/2}\sin\beta_3\sin\beta_2.
\end{aligned}\tag{6.9}$$

Wenn wir auch hier den abstrakten Isomorphismus zwischen der Lie-Algebra der dreidimensionalen Keplerbewegung der L-Elemente und der entsprechenden Lie-Algebra der Wirkungs- und Winkelvariablen, also der $\tilde{L}$-Elemente konkretisieren, haben wir die Transformation des räumlichen Oszillator-Kepler-Problems von kartesischen Koordinaten auf Wirkungs- und Winkelvariable, d.h. auf Delaunay-similar-Elemente in der exzentrischen Anomalie gewonnen. Wir erhalten folgende Transformationsbeziehungen (vgl. auch Baumgarte 1978):

$$x_i = (2p_0)^{-1/2}(\tilde{L}_{i5} - \tilde{L}_{i4}), \qquad i = 1, 2, 3 \tag{6.10a}$$

$$r = (2p_0)^{-1/2}(\tilde{L}_{56} - \tilde{L}_{46}) \tag{6.10b}$$

$$p_i = \frac{1}{r}\tilde{L}_{i6}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6.10c}$$

Nach Einsetzen erhält man für die Transformationsgleichungen (6.10a) (vgl. auch Stiefel and Scheifele 1971 S. 53) in Vektorschreibweise:

$$\boldsymbol{x} = (2p_0)^{-1/2}\{[\alpha_3 \cos\beta_3 - (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)^{1/2}]\boldsymbol{A} + \alpha_2 \sin\beta_3\, \boldsymbol{B}\} \tag{6.11}$$

für (6.10b) erhält man:

$$r = (2p_0)^{-1/2}(\alpha_3 - (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)^{1/2}\cos\beta_3). \tag{6.12}$$

Die Gleichungen (6.10c) kann man folgendermaßen in Vektorform schreiben:

$$r\boldsymbol{p} = -\alpha_3 \sin\beta_3 \boldsymbol{A} + \alpha_2 \cos\beta_3 \boldsymbol{B}. \tag{6.13}$$

Die obigen Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ sind in (5.13a) und (5.14a) angegeben.

Wir wollen noch folgendes bemerken: Benutzt man die bekannten Beziehungen zwischen der exzentrischen Anomalie β_3 und der wahren Anomalie ψ

$$\begin{aligned} r\cos\psi &= (2p_0)^{-1/2}[\alpha_3\cos\beta_3 - (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)^{1/2}] \\ r\sin\psi &= (2p_0)^{-1/2}\alpha_2 \sin\beta_3, \end{aligned} \tag{6.14}$$

so bekommt man die bekannte Transformation auf Delaunay-similar-Elemente in der wahren Anomalie für die Koordinaten x_1, x_2, x_3, welche lauten (vgl. Bond 1976, Scheifele and Graf 1974)

$$\begin{aligned} x_1 &= r[\cos(\psi+\beta_2)\cos\beta_1 - \sin(\psi+\beta_2)\sin\beta_1\cos I] \\ x_2 &= r[\cos(\psi+\beta_2)\sin\beta_1 + \sin(\psi+\beta_2)\cos\beta_1\cos I] \\ x_3 &= r\sin(\psi+\beta_2)\sin I \end{aligned} \tag{6.15}$$

mit

$$\cos I = \alpha_1/\alpha_2, \qquad \sin I = [1 - (\alpha_1/\alpha_2)^2]^{1/2}.$$

Zum Schluß wollen wir noch auf die Transformation von Delaunay-similar-Elementen auf Poincare-similar-Elemente in der exzentrischen Anomalie (also von DSu auf PSu-Elemente) eingehen. Diese kanonische Transformation ist in Bond (1976) (Seite 290, Gleichung (15)) angegeben. Über die sehr einfach abzuleitende inverse Transformation kann man die Lie-Algebra SO(4,2) der $\tilde{L}_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, 6$ und damit auch die Variablen x_i, r, p_i (s. (6.10a–c)) durch PSu-Elemente ausdrücken.

Annerkennungen

Der Verfasser dankt Herrn Dr.-Ing. W. von Grünhagen für wertvolle Hinweise und Diskussionen und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre Unterstützung.

Anhang 1. Die Auffassung des Gravitationsparameters als kanonischer Impuls in der Hamilton-Jacobischen Theorie

In Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) hat die homogene Hamiltonfunktion $H_h = H + p_0$ mit $(-K^2) = p_4$ die Gestalt:

$$H_h = \tfrac{1}{2}\{p_r^2 + (1/r^2)(p_\theta^2 + p_\phi^2/\cos^2\theta)\} + (p_4/r) + p_0 = 0. \tag{A1.1}$$

In (A1.1) sind p_0 und p_4 bereits Elemente. Mit

$$p_0 = P_0, \qquad (p_\theta^2 + P_\phi^2/\cos^2\theta)^{1/2} = P_\psi, \qquad p_\phi = P_\phi, \qquad p_4 = P_4 \tag{A1.2}$$

gilt für die Erzeugende S,

$$S = S(x_0, r, \theta, \phi, x_4; P_0, P_\psi, P_\phi, P_4), \tag{A1.3}$$

die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\{S_r^2 + (1/r^2)(S_\theta^2 + S_\phi^2/\cos^2\theta)\} + (S_{x_4}/r) + S_{x_0} = 0. \tag{A1.4}$$

Der Separationsansatz

$$S = \int_{r_p}^{r} [-(2P_0 + 2P_4/r + P_\psi^2/r^2)]^{1/2}\,\mathrm{d}r + \int_0^\theta (P_\psi^2 - P_\phi^2/\cos^2\theta)^{1/2}\,\mathrm{d}\theta + P_\phi\phi + P_4x_4 + P_0x_0 \tag{A1.5}$$

(r_p ist noch geeignet zu bestimmen) liefert vier Konstante für die Ableitungen

$$\frac{\partial S}{\partial P_0}, \quad \frac{\partial S}{\partial P_4}, \quad \frac{\partial S}{\partial P_\psi}, \quad \frac{\partial S}{\partial P_\phi}.$$

Neu ist jetzt die Beziehung

$$\frac{\partial S}{\partial P_4} = -\int_{r_p}^{r} \mathrm{d}r[-(2P_0r^2 + 2P_4r + P_\psi^2)]^{-1/2} + x_4 = \text{const} = c_4. \tag{A1.6}$$

Mit

$$a = -P_4/2P_0, \qquad P_\psi^2 = -P_4P_0(1-e)^2, \tag{A1.7}$$

erhalten wir

$$x_4 - c_4 = (2P_0)^{-1/2}\left\{\cos^{-1}\left[\frac{(1-r/a)}{e}\right] - \cos^{-1}\left[\frac{(1-r_p/a)}{e}\right]\right\}. \tag{A1.8}$$

Wählen wir für die noch freie Integrationsgrenze r_p

$$r_p = a(1-e), \tag{A1.9}$$

(r_p ist damit der Abstand vom Perizentrum) so folgt mit dem Winkel u (es ist $u = \beta_3$ die exzentrische Anomalie)

$$u = (2P_0)^{1/2}(x_4 - c_4) \tag{A1.10}$$

die Gleichung

$$r = a(1 - e \cos u), \qquad a = K^2/2p_0. \tag{A1.11}$$

Sie ist eine Ellipsengleichung mit der *exzentrischen Anomalie u* als Parameter, der großen *Halbachse a* und der *Exzentrizität e*. Die Gleichung

$$\partial S/\partial P_0 = \text{const} \tag{A1.12}$$

liefert, wie man leicht sieht, in Verbindung mit (A1.6) die Differentialgleichung

$$\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}u = r/(2P_0)^{1/2} \tag{A1.13}$$

und damit

$$x_0 - \text{const} = t - t_p = a/(2P_0)^{1/2}(u - e \sin u), \qquad a/(2P_0)^{1/2} = K^2/(2p_0)^{3/2}, \tag{A1.14}$$

(t_p: Zeit am Perizentrum).

Mit (A1.11) und (A1.14) hat man die Beziehungen zwischen Zeit, Radius und der exzentrischen Anomalie erhalten. *Über das Setzen von* $(-K^2) = p_4$ *ist die exzentrische Anomalie automatisch eingeführt worden.*

Die Gleichungen

$$\partial S/\partial P_\psi = \text{const} = c_\psi; \qquad \partial S/\partial P_\phi = \text{const} = c_\phi \tag{A1.15a, b}$$

führen auf bekannte Beziehungen.

Anhang 2. Die Quantelung der Ladung

In der (nichtrelativistischen) Schrödingergleichung

$$H\tilde{\psi} = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} \tag{A2.1}$$

beschreibt der *Hamilton-Operator H für den Fall aller wasserstoffähnlichen Atome* (bzw. Ionen) die Bewegung eines Teilchens im 'Kepler-Feld'. Für H wird (in Kugelkoordinaten) angesetzt:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\hbar^2 l^2}{r^2}\right) - \frac{v_0}{r} p_u. \tag{A2.2}$$

Es ist dabei

$$m\text{: reduzierte Masse} \tag{A2.3a}$$

$$p_r = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}(\partial/\partial r + 1/r) \tag{A2.3b}$$

$$l^2 = -\left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right] \tag{A2.3c}$$

(Operator für das Quadrat des Drehimpulses). In Analogie zur Einführung des kanonischen Impulses p_4 wird jetzt in (A2.2) der 'Coulomb-Operator' p_u eingeführt. Damit dieser die Dimension einer Wirkung hat, tritt die charakteristische Geschwindigkeit v_0 auf, welche eine der von Hartree eingeführten natürlichen Grundeinheiten für die Beschreibung der Atomhülle ist.

Es gilt für den Operator p_u:

$$p_u = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial u}. \tag{A2.4}$$

Damit die Funktion $\tilde{\psi}$ eine eindeutige Funktion ist, muß sie im Winkel u mit der Periode 2π periodisch sein.

Der Ansatz

$$\tilde{\psi} = (2\pi)^{-1/2} \exp(\mathrm{i}Zu)\psi; \qquad Z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{A2.5}$$

(Z ist damit die 4. Quantenzahl)

liefert die von (der 'exzentrischen Anomalie') u unabhängigen Schrödingergleichung

$$\left\{\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\hbar^2 l^2}{r^2}\right) - \frac{Zv_0\hbar}{r}\right\}\psi = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial t}\psi. \tag{A2.6}$$

Der Ausdruck

$$-Zv_0\hbar/r$$

muß nun aber das Potential des Coulomb-Feldes darstellen. Daher drücken wir $v_0\hbar$ durch das Quadrat einer Ladung aus, also

$$v_0\hbar = e^2 \tag{A2.7}$$

(mit $e = 4{,}80 \times 10^{-10}$ el.stat. Einheiten)†.

Damit kann man—wenn man Ze als Kernladung auffaßt—auf die Existenz von Elementarladungen schließen.

Die Forderung, daß in der Schrödingergleichung die partielle Ableitung nach der 'exzentrischen Anomalie' u vorkommen soll, bedingt—neben dem Auftreten einer ausgezeichneten Geschwindigkeit v_0—die Quantelung der Ladung.

Literatur

Barut A O 1972 *Dynamical Groups and Generalized Symmetries in Quantum Theory. With Applications in Atomic and Particle Physics* University of Canterbury, Christchurch (New Zealand)

Baumgarte J 1978 *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelles Journal) Band **301** S 59–76

—— 1979a *Die Invarianzgruppe des Oszillator-Kepler-Problems*, ZAMM **59** S 177–87

—— 1979b *Instabilities in Dynamical Systems* ed. V G Szebehely (Dordrecht-Holland: Reidel) 81–93

Bond V R 1976 *Celestial Mechanics* **13** (Dordrecht-Holland: Reidel)

Goldstein H 1974 *Klassische Mechanik* 3 Aufl., Akadem. Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main

Scheifele G and Graf O 1974 *Analytical Satellite Theories based on a new Set of Canonical Elements, AIAA Paper* No 74–838, Anaheim, California

Stickforth J 1977 *Int. J. Theor. Phys.* **16** pp 409–17

Stiefel E L and Scheifele G 1971 *Linear and Regular Celestial Mechanics* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer)

† Es ist natürlich $v_0 = \alpha c$, mit α als Feinstrukturkonstanten und c als Lichtgeschwindigkeit. Aber die Lichtgeschwindigkeit brauchen wir im nichtrelativistischen Fall nicht zu kennen.